

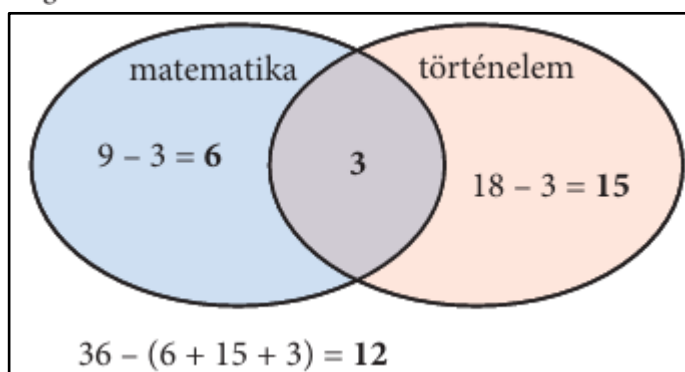
VALÓSZÍNŰSÉG A GYAKORLATBAN

MINTAPÉLDA

Egy 36 fős osztályban 9 diák tanulja emelt szinten a matematikát, 18 a történelmet, s ezek közül 3 diák mindkét tantárgyat. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott diák

- a) emelt szinten tanulja a történelmet;
- b) mindkét tárgyat emelt szinten tanulja;
- c) egyik tantárgyat sem tanulja emelt szinten;
- d) csak a történelmet tanulja emelt szinten;
- e) csak az egyik tantárgyat tanulja emelt szinten, a másikat nem?

Megoldás



a) Ha harminchat diákból 18 tanulja emelt szinten a történelmet, akkor a keresett valószínűség $\frac{18}{36} = 0,5$.

b) $\frac{3}{36} \approx 0,083$.

c) Először tudnunk kellene, hogy pontosan hány diák nem tanulja emelt szinten egyik tantárgyat sem. Ehhez készíthetünk Venn-diagramot, vagy használhatjuk a „logikai szita” módszert is: a 36 diák közül zárjuk ki azokat, akik valamelyik tantárgyat emelt szinten tanulják: $36 - 9 - 18 = 9$; azokat, akik mindkét tárgyat emelt szinten tanulják, kétszer zártuk ki, holott csak egyszer kellett volna. A helyes válasz így: $9 + 3 = 12$. Tehát 12 diák nem tanulja egyik tantárgyat sem emelt szinten, így a keresett valószínűség $\frac{12}{36} \approx 0,333$.

d) Használjuk az előző feladat ábráját! A valószínűség

$$\frac{18 - 3}{36} = \frac{15}{36} \approx 0,417.$$

Ebben a feladatban máshogy is gondolkodhattunk volna: annak a valószínűsége, hogy egy diák emelt szinten tanulja a történelmet, az a) feladat szerint $\frac{18}{36}$, de ebbe beleszámoltuk azt a $\frac{3}{36}$ valószínűséget is, hogy a diák mindkét tantárgyat emelt szinten tanulja. Annak valószínűsége tehát, hogy csak a történelmet tanulja emelt szinten, a maradék: $\frac{18}{36} - \frac{3}{36} = \frac{15}{36} \approx 0,417$.

e) A Venn-diagram alapján: $\frac{6+15}{36} = \frac{21}{36} \approx 0,583$. Vagy valószínűségekkel: $\frac{6}{36} + \frac{15}{36} = \frac{21}{36} \approx 0,583$.

FELADATOK:

1. Egy biztosítótársaság felmérést készített 1000 véletlenszerűen kiválasztott ügyfele bevonásával. Az 1000 ügyfél közül 611-nek gépjármű-biztosítása, 389-nek lakásbiztosítása és 96-nak mindkétféle biztosítása van a társaságnál.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy ezen 1000 ügyfél közül egyet véletlenszerűen kiválasztva ennek az ügyfélnek

- a) van gépjármű-biztosítása a társaságnál;
- b) a kétféle biztosítás közül egyik fajtaival sem rendelkezik;
- c) a kétféle biztosítás közül legalább az egyik fajtaival rendelkezik;
- d) csak az egyik fajta biztosítása van, a másik nincs?

Megoldás:

Az adatok elemzése:

Induljunk el a közös részből (metszet), és úgy haladjunk kifelé:

- **Mindkettő van (Metszet):** 96 fő.
- **Csak gépjármű (G):** $611 - 96 = 515$ fő.
- **Csak lakás (L):** $389 - 96 = 293$ fő.
- **Legalább egyik (Unió):** $515 + 96 + 293 = 904$ fő.
- **Egyik sem:** $1000 - 904 = 96$ fő.

A valószínűségek kiszámítása (Összes eset = 1000):

a) Van gépjármű-biztosítása:

Itt egyszerűen a feladatban megadott 611 fővel számolunk (nem számít, van-e mellette más is).

$$P(A) = \frac{611}{1000} = 0,611 \text{ (vagy } 61,1\%)$$

b) Egyik fajtaival sem rendelkezik:

Ők azok, akik kívül esnek a körökön.

$$P(B) = \frac{96}{1000} = 0,096 \text{ (vagy } 9,6\%)$$

c) Legalább az egyik fajtaival rendelkezik:

Ez a két halmaz uniója (azok, akiknek csak G, csak L, vagy mindkettő van).

$$P(C) = \frac{904}{1000} = 0,904 \text{ (vagy } 90,4\%)$$

d) Csak az egyik fajta biztosítása van (a másik nincs):

Ide a "csak gépjármű" (515) és a "csak lakás" (293) csoport tartozik.

Kedvező esetek: $515 + 293 = 808$

$$P(D) = \frac{808}{1000} = 0,808 \text{ (vagy } 80,8\%)$$

- 2.** Az alábbi táblázat egy vérellátó központ nyilvántartása arról, hogy a legutóbbi véradó akciójuk során hány egységet kaptak az egyes vércsoportokból a különböző donoroktól (1 egység = 4,5 deciliter).

	Vércsoport			
	0	A	B	AB
Rh-pozitív	161	73	44	14
Rh-negatív	30	14	8	2

Véletlenszerűen kiválasztva egy donort mennyi a valószínűsége annak, hogy

- a) a donor AB-s vagy B-s vércsoportú;
- b) a donor 0-s vércsoportú vagy Rh-pozitív;
- c) a donor nem AB vércsoportú, és nem is Rh-negatív?

Megoldás:

Összes donor száma: $161 + 73 + 44 + 14 + 30 + 14 + 8 + 2 = 344$

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a donor AB-s vagy B-s?

Ebben az esetben összeadjuk az összes AB-s és az összes B-s donort (függetlenül az Rh-faktortól).

B-s donorok: $44 + 8 = 52$

AB-s donorok: $14 + 2 = 16$

Kedvező esetek: $52 + 16 = 68$

$$P(A) = \frac{68}{344} = \frac{17}{86} \approx 0,1977 \text{ (vagy } 19,77\%)$$

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a donor 0-s vércsoportú vagy Rh-pozitív?

Itt figyelniünk kell, hogy ne számoljuk kétszer azokat, akik 0-sok és Rh-pozitívak is!

Összes Rh-pozitív: $161 + 73 + 44 + 14 = 292$

0-s vércsoportú, de Rh-negatív: 30

Kedvező esetek: $292 + 30 = 322$

(Vagy másképp: Összes 0-s (191) + Összes Rh-pozitív (292) – 0-s Rh-pozitív metszet (161) = 322)

$$P(B) = \frac{322}{344} = \frac{161}{172} \approx 0,9360 \text{ (vagy } 93,60\%)$$

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a donor nem AB vércsoportú, és nem is Rh-negatív?

Ez a megfogalmazás azt jelenti, hogy a donor **Rh-pozitív**, és a vércsoportja **0, A vagy B**.

Tehát az Rh-pozitív sorból csak az AB-seket kell kihagynunk.

Kedvező esetek (Rh+ és nem AB): $161 + 73 + 44 = 278$

$$P(C) = \frac{278}{344} = \frac{139}{172} \approx 0,8081 \text{ (vagy } 80,81\%)$$

- 3** 📡 Öt barátnő érkezik az előadóterembe, köztük Anna és Kati. Véletlenszerű sorrendben, egyesével lépnek a terembe. Mennyi a valószínűsége, hogy
- a) Anna lép be elsőnek?
 - b) Anna és Kati valamilyen sorrendben egymás után lépnek be?
 - c) Anna és Kati nem egymás után lépnek be?

Megoldás:

Ebben a feladatban a sorrend számít, így permutációkkal érdemes dolgozni. Öt barátnő érkezik, tehát az **összes lehetséges sorrend:**

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

a) Mennyi a valószínűsége, hogy Anna lép be elsőnek?

Ha Anna az első, akkor a maradék 4 helyre a többi 4 barátnő bármilyen sorrendben érkezhet.

Kedvező esetek: $4! = 24$

Logikai megközelítés: Mivel 5 barátnő van, és mindegyiküknek ugyanakkora esélye van elsőnek lenni, a valószínűség egyszerűen

$$P(A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ (vagy 20\%)}$$

b) Anna és Kati valamilyen sorrendben egymás után lépnek be?

Ilyenkor Annát és Katit "össze fűzzük" egy egységnek. Így 4 egységet kell sorba rendeznünk (a tömbösített páros + a maradék 3 lány).

Egységek sorrendje: $4! = 24$

Belső sorrend: Mivel Anna és Kati bármilyen sorrendben lehetnek (Anna-Kati vagy Kati-Anna), ezt meg kell szorozni 2-vel ($2!$ -al).

Kedvező esetek: $4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$

$$P(B) = \frac{48}{120} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ (vagy 40\%)}$$

c) Anna és Kati nem egymás után lépnek be?

Ez az előző esemény **komplementere** (ellentéte).

A teljes valószínűségből (1 vagy 100%) kivonjuk annak az esélyét, hogy egymás után lépnek be.

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - 0,4 = 0,6 \text{ (vagy 60\%)}$$

Vagy esetszámmal számolva:

$$\frac{120-48}{120} = \frac{72}{120} = 0,6$$

- 4.** Ha történelemből veled együtt már csak hatan nem feleltetek, és a mai órán két ember felel egymás után, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy
- a) te leszel az első felelő;
 - b) te leszel a második felelő;
 - c) felelni fogsz a mai órán;
 - d) te nem fogsz felelni a mai órán?

Megoldás:

Ebben a feladatban összesen **6 ember közül választanak ki 2 felelőt, ahol számít a sorrend** (ki az első és ki a második).

Összes lehetséges eset:

Az első felelő 6-féle ember lehet, a második pedig a maradék 5-ből bárki.

$$6 \times 5 = 30$$

a) Mennyi a valószínűsége, hogy te leszel az első felelő?

Ha te vagy az első, akkor a második bárki lehet a maradék 5 főből.

Kedvező esetek száma: 5

Valószínűség:

$$P(A) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} = 0,166667 = 16,67\%$$

Logikusan: 6 egyenlő esélyű jelölt van az első helyre, te az egyik vagy.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy te leszel a második felelő?

Ha te vagy a második, akkor az első felelő a maradék 5 főből került ki.

Kedvező esetek száma: 5

Valószínűség:

$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} = 0,166667 = 16,67\%$$

c) Mennyi a valószínűsége, hogy felelni fogsz a mai órán?

Ez azt jelenti, hogy vagy elsőnek, vagy másodiknak választanak ki.

Mivel a két esemény (első vagy második vagy) kizárja egymást, a valószínűségeket összeadhatjuk.

Kedvező esetek: 5 (első vagy) + 5 (második vagy) = 10

Valószínűség:

$$P(C) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 0,333333 = 33,33\%$$

d) Mennyi a valószínűsége, hogy te nem fogsz felelni a mai órán?

Ez a "felelni fogsz" esemény ellentettje (komplementere).

Úgy kapjuk meg, ha az egészből (1) kivonjuk a felelés esélyét.

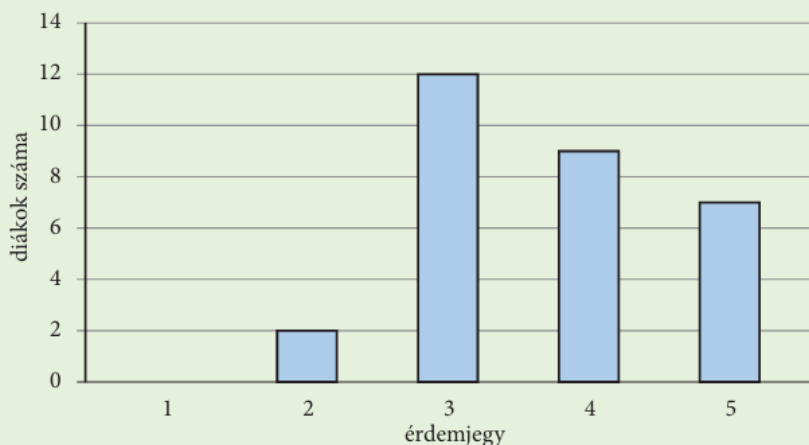
Számítás:

$$P(D) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0,666667 = 66,67\%$$

Ez a feladat jól mutatja, hogy néha a legegyszerűbb logikai úton (pl. 1/6 esély minden helyre) gyorsabb célba érni, mint a nagy számokkal.

STATISZTIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÖSSZEFOGLALÁS, GYAKORLÁS, TUDÁSPRÓBA

2 (Érettségi feladat, 2017)



Egy 30 fős osztály matematika érettségi vizsgájának érdemjegyei olvashatók le az alábbi diagramról. Add meg az osztály matematika érettségi érdemjegyeinek átlagát, mediánját és móduszát!

Megoldás

Először olvassuk le az adatokat a diagramról (az oszlopok magassága mutatja a diákok számát).

Érdemjegy	1-es	2-es	3-as	4-es	5-ös	Összesen
Gyakoriság	0 db	2 db	12 db	9 db	7 db	30 db

1. Módusz (A leggyakoribb érték)

A módusz az az érdemjegy, amelyikből a legtöbb született. A grafikonon a legmagasabb oszlop a **3-as** osztályzatnál van (12 diák).

Módusz: 3

2. Medián (A középső érték)

Mivel 30 diák van (páros szám), a medián a sorba rendezett adatok **15. és 16. értékének átlaga**. Nézzük, hol helyezkednek el ezek a diákok:

1-es és 2-es jegyek: összesen 2 diák (1-2. hely)

3-as jegyek: +12 diák = összesen 14 diák (3-14. hely)

4-es jegyek: +9 diák = összesen 23 diák (15-23. hely)

Látható, hogy a 15. és a 16. diák is **4-est** kapott.

Medián: 4

3. Átlag (Számítási közép)

Az átlaghoz összeadjuk az összes jegyet, majd elosztjuk a diákok számával (30).

$$\text{Átlag} = \frac{(0 \cdot 1) + (2 \cdot 2) + (12 \cdot 3) + (9 \cdot 4) + (7 \cdot 5)}{30}$$

$$\text{Átlag} = \frac{0 + 4 + 36 + 36 + 35}{30} = \frac{111}{30}$$

Átlag: 3,7

3 (Érettségi feladat, 2009)

Béla egy fekete és egy fehér színű szabályos dobókockával dob. Feljegyzí azt a kétjegyű számot, amelyet úgy kap, hogy a tízes helyiértéken a fekete kockával dobott szám, az egyes helyiértéken pedig a fehér kockával dobott szám áll. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a feljegyzett szám

- a) négyzetszám;
- b) számjegyei megegyeznek;
- c) számjegyeinek összege legfeljebb 9?

Megoldás:

Ez egy klasszikus valószínűségi számítási feladat. Először határozzuk meg az összes lehetséges kimenetelt!

Mivel két kockával dobunk (fekete és fehér), és mindkettőn 1-től 6-ig szerepelhetnek a számok, az összes lehetséges kétjegyű szám száma:

Összes eset: $6 \times 6 = 36$

A valószínűséget a következő képlettel számoljuk:

$$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$$

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a feljegyzett szám négyzetszám?

Keressük azokat a négyzetszámokat, melyek kétjegyűek (mert 2 kockával dobunk) és a számjegyeik 1 és 6 közöttiek (hiszen kockadobások):

$16 = 4^2$ (Fekete: 1, Fehér: 6) – **Megfelel**

$25 = 5^2$ (Fekete: 2, Fehér: 5) – **Megfelel**

$36 = 6^2$ (Fekete: 3, Fehér: 6) – **Megfelel**

$49 = 7^2$ (Fekete: 4, Fehér: 9) – Nem jó, mert a 9-es nem szerepel a kockán

$64 = 8^2$ (Fekete: 6, Fehér: 4) – **Megfelel**

$81 = 9^2$ (Fekete: 8, Fehér: 1) – Nem jó, mert a 8-as nem szerepel a kockán

Kedvező esetek száma: 4

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0,1111 = 11,11\%$$

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a számjegyei megegyeznek?

Ez akkor fordul elő, ha mindkét kockával ugyanazt a számot dobjuk:

Lehetőségek: 11, 22, 33, 44, 55, 66.

Kedvező esetek száma: 6

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0,1667 = 16,67\%$$

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a számjegyeinek összege legfeljebb 9?

Ez akkor fordul elő, ha:

Az 1-es, 2-es és 3-as mellé mind a 6 lehetőség jó a másik kockával → ez $3 \times 6 = 18$ kedvező lehetőség

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| • $1 + 1 = 2$ | • $2 + 1 = 3$ | • $3 + 1 = 4$ |
| • $1 + 2 = 3$ | • $2 + 2 = 4$ | • $3 + 2 = 5$ |
| • $1 + 3 = 4$ | • $2 + 3 = 5$ | • $3 + 3 = 6$ |
| • $1 + 4 = 5$ | • $2 + 4 = 6$ | • $3 + 4 = 7$ |
| • $1 + 5 = 6$ | • $2 + 5 = 7$ | • $3 + 5 = 8$ |
| • $1 + 6 = 7$ | • $2 + 6 = 8$ | • $3 + 6 = 9$ |

A 4-es mellé 5-ig jó a másik kockával → ez **5 kedvező lehetőség**

- $4 + 1 = 5$
- $4 + 2 = 6$
- $4 + 3 = 7$
- $4 + 4 = 8$
- $4 + 5 = 9$

Az 5-ös mellé 4-ig jó a másik kockával → ez **4 kedvező lehetőség**

- $5 + 1 = 6$
- $5 + 2 = 7$
- $5 + 3 = 8$
- $5 + 4 = 9$

A 6-os mellé 3-ig jó a másik kockával → ez **3 kedvező lehetőség**

- $6 + 1 = 7$
- $6 + 2 = 8$
- $6 + 3 = 9$

Kedvező esetek száma összesen: 30

$$P(C) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} = 0,8333 = 83,33\%$$

Másik megoldás:

Egyszerűbb megnézni, mikor több, mint 9, és azt kivonni az összesből.

Az összeg nagyobb, mint 9, ha:

- | | |
|----------------|----------------|
| • $4 + 6 = 10$ | • $6 + 4 = 10$ |
| • $5 + 5 = 10$ | • $6 + 5 = 11$ |
| • $5 + 6 = 11$ | • $6 + 6 = 12$ |

Ez 6 olyan eset, amikor az összeg 10 vagy több. Tehát a maradék esetben az összeg legfeljebb 9.

Kedvező esetek száma: $36 - 6 = 30$

$$P(C) = \frac{36 - 6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} = 0,8333 = 83,33\%$$

16 (Érettségi feladat, 2016, emelt szint)

Egy városi piacon a piros almát 5 kg-os csomagolásban árulják. A csomagokon olvasható felirat szerint egy-egy csomag tömege „5 kg $\pm$ 10 dkg”. (Az almák nagy mérete miatt az 5 kg pontosan nem mérhető ki.) A minőség-ellenőrzés során véletlenszerűen kiválasztanak 8 csomagot, és ezek tömegét méréssel ellenőrzik. Csak akkor engedélyezik az almák árusítását, ha egyik csomag tömege sem kevesebb 4 kg 90 dkg-nál, és a nyolc mérési adat 5 kg-tól mért átlagos abszolút eltérése nem haladja meg a 10 dkg-ot. (Az adatok átlagos abszolút eltérése azt jelenti, hogy az 5 kg-tól vett eltérések abszolútértékének az átlagát számoljuk ki.) A mérések eredménye a következő:

a mérés sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
mért tömeg (dkg)	506	491	493	512	508	517	493	512

A mérések alapján engedélyezik-e az almák árusítását?

Megoldás:

Először is váltsunk át mindent egyetlen mértékegységbe (dkg), hogy könnyebb legyen számolni:

Célkitűzés: 5 kg = 500 dkg

Minimum tömeg: 4 kg 90 dkg = 490 dkg

Maximális megengedett átlagos abszolút eltérés: 10 dkg

1. feltétel: Egyik csomag sem lehet kevesebb 490 dkg-nál

Nézzük meg a táblázat adatait: 506, 491, 493, 512, 508, 517, 493, 512

A legkisebb érték a listában a 491 dkg.

Mivel $491 > 490$, az első feltétel teljesül.

2. feltétel: Az 500 dkg-tól mért átlagos abszolút eltérés ≤ 10 dkg

Ehhez ki kell számolnunk minden egyes mérés eltérését az 500-tól, vennünk kell ezek abszolút értékét (tehát csak azt nézzük, mennyivel messzebb van az 500-tól, az irány nem számít), majd ezeket átlagolnunk kell.

mérés száma	tömeg (x_i)	eltérés az 500 g-tól ($ x - x_i $)
1.	506	6
2.	491	9
3.	493	7
4.	512	12
5.	508	8
6.	517	17
7.	493	7
8.	512	12

Az eltérések összege: $6 + 9 + 7 + 12 + 8 + 17 + 7 + 12 = 78$

Az átlagos abszolút eltérés kiszámítása:

$$\frac{78}{8} = 9,75 \text{ dkg}$$

Mivel a számított érték (**9,75 dkg**) nem haladja meg a megengedett **10 dkg**-ot, a **második feltétel is teljesül.**

Végső következtetés: Mivel mindkét előírt feltétel teljesült a mérések során, az almák árusítását engedélyezik.

24. (Érettségi feladat, 2006)

Egy márciusi napon öt alkalommal mérték meg a külső hőmérsékletet. A kapott adatok átlaga $1\text{ }^{\circ}\text{C}$, mediánja $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Adj meg öt ilyen lehetséges hőmérsékletértéket!

Megoldás:

Ez egy remek statisztikai példa, ahol "visszafelé" kell gondolkodnunk.

Öt adatunk van, nevezzük őket sorrendben: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

Nézzük meg, mit tudunk róluk:

1. A medián (középső érték)

Mivel öt adatunk van, a medián pontosan a középső, azaz a harmadik elem lesz, ha sorba rendezzük őket: $x_3 = 0^{\circ}\text{C}$

2. Az átlag és az összeg

Ha öt adat **átlaga $1\text{ }^{\circ}\text{C}$** , akkor az adatok **összegének 5-nek kell lennie**, hiszen:

$$\frac{\text{összeg}}{5} = 1 \rightarrow \text{összeg} = 1 \cdot 5 = 5$$

3. Megoldási stratégia

Keressünk öt olyan számot, ahol a középső 0, és az összegük 5!

Érdemes úgy választani a számokat, hogy $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$

4. Példa egy lehetséges megoldásra:

- Legyen a két kisebb szám: **-2 és -1**.
- A középső (medián) fixen: **0**.
- Eddig az összeg: $-2 + (-1) + 0 = -3$
- Ahhoz, hogy az összeg **+5** legyen, a maradék két számnak **8-at** kell kiadnia (mivel $-3 + 8 = 5$).
- Válasszuk például a **3-at** és az **5-öt**.

Tehát a mért értékek: $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$, $-1\text{ }^{\circ}\text{C}$, $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, $3\text{ }^{\circ}\text{C}$, $5\text{ }^{\circ}\text{C}$

Ellenőrzés:

- Rendezett?
Igen, növekvő sorrendben vannak.
- Medián?
A középső elem a 0. Teljesül.
- Átlag?
 $(-2 - 1 + 0 + 3 + 5) / 5 = 5 / 5 = 1$ Teljesül.

Természetesen rengeteg más jó megoldás is létezik például:

- $-1\text{ }^{\circ}\text{C}$, $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, $1\text{ }^{\circ}\text{C}$, $5\text{ }^{\circ}\text{C}$
 - $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$, $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$, $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, $20\text{ }^{\circ}\text{C}$
-

33 (Érettségi feladat, 2007)

A 100-nál kisebb és hattal osztható pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mekkora valószínűséggel lesz ez a szám 8-cal osztható?

Megoldás:

A klasszikus valószínűségi modellt kell alkalmaznunk: a kedvező esetek számát kell elosztanunk az összes eset számával.

1. Összes eset: Hány 100-nál kisebb, 6-tal osztható pozitív egész szám van?

Ezek a számok a 6 többszörösei: 6, 12, 18, 24, ...

A legnagyobb ilyen szám a 96, hiszen a következő a 102 lenne, ami már túl nagy.

A darabszámot egyszerű osztással kapjuk meg:

$$96 : 6 = 16$$

Tehát az összes eset száma: 16.

2. Kedvező esetek: Melyek oszthatók ezek közül 8-cal is?

Ha egy szám osztható 6-tal is és 8-cal is, akkor az osztható a két szám legkisebb közös többszörösével is.

- 6 többszörösei: 6, 12, 18, **24**, 30, 36, ...
- 8 többszörösei: 8, 16, **24**, 32, ...
- A legkisebb közös többszörös a 24.

Keressük tehát a 24 többszöröseit 100-ig:

- $1 \times 24 = \mathbf{24}$
- $2 \times 24 = \mathbf{48}$
- $3 \times 24 = \mathbf{72}$
- $4 \times 24 = \mathbf{96}$
- (A következő a 120 lenne)

Tehát a kedvező esetek száma: 4.

3. A valószínűség kiszámítása:

A valószínűség (P) a kedvező esetek és az összes eset hányadosa:

$$P = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

Válasz: Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám 8-cal is osztható, $\frac{1}{4}$ vagy 0,25 (vagy 25%).

26 ☞ Egy 32 fős osztályban mindenki tanul idegen nyelvet. Összesen 16 diák tanul egy, 11 diák kettő, a többiek pedig 3 idegen nyelvet.

- a) Készíts gyakorisági táblázatot arról, hogy hányan tanulnak 1, 2, illetve 3 idegen nyelvet!
- b) Átlagosan hány idegen nyelvet tanulnak az osztály tanulói?
- c) A tanult idegen nyelvek számából álló adatsornak mennyi a módusza és a mediánja?

Megoldás:

Először is számoljuk ki, hányan tanulnak 3 nyelvet:

Az osztály létszáma 32 fő.

$32 - 16 - 11 = 5$ diák tanul 3 nyelvet

a) **Gyakorisági táblázat**

A gyakoriság azt mutatja meg, hogy az adott érték hányszor fordul elő az adatsorban.

Tanult nyelvek száma	Gyakoriság (fő)
1	16
2	11
3	5
Összesen	32

b) **Átlag kiszámítása**

Az átlagot úgy kapjuk meg, hogy az összes tanult nyelv számát elosztjuk a diákok számával.

Összes nyelv: $16 \times 1 + 11 \times 2 + 5 \times 3 = 16 + 22 + 15 = 53$

Átlag:

$$\frac{53}{32} \approx 1,65625 \approx 1,66$$

Válasz: Az osztály tanulói átlagosan kb. **1,66** idegen nyelvet tanulnak.

c) **Módusz és Medián**

Módusz: A leggyakrabban előforduló elem.

Mivel 16-an tanulnak 1 nyelvet (ez a legnagyobb gyakoriság),

$\Rightarrow$ a módusz: 1.

Medián: A sorba rendezett adatok középső értéke.

Mivel 32 adatunk van (páros szám), a medián a 16. és a 17. adat átlaga lesz.

Az 1. - 16. adatig mindenki 1 nyelvet tanul.

A 17. adat már a 2 nyelvet tanulók csoportjába esik.

$$\text{Medián} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$